Logik und Objekte

Logik

$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$

$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

$\neg(\forall x : P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$

$\neg(\exists x : P(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$

$\neg(\exists! x : P(x)) \Leftrightarrow [\forall x : \neg P(x)]$

$\vee [\exists x, y : x \neq y \wedge P(x) \wedge P(y)]$

$\exists x : \forall y : P(x,y) \Rightarrow \forall\, y : \exists x : P(x,y)$

Mengenlehre

Mengen

$\bigcup_{a \in A} a = \{x | \exists a : a \subseteq A \wedge x \in a\}$

$A \times B = \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}$

Abbildungen

$f : A \to B.$

f surjektiv: $\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$

f injektiv:

$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

f bijektiv: $\forall b \in B : \exists! a \in A : f(a) = b$

Verknüpfungen:

$i : A \to B, s : B \to C.$

$s \circ i$ surjektiv $\Rightarrow s$ surjektiv

$s \circ i$ injektiv $\Rightarrow i$ injektiv

Umkehrfunktion:

f bijektiv $\Leftrightarrow \exists f^{-1} : B \to A, b \mapsto f^{-1}(b)$

$f \circ f^{-1} = \mathbb{1}_A, \quad f^{-1} \circ f = \mathbb{1}_B$

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Bild und Urbild:

$f(\tilde{A} \subseteq A) = \{b \in B | \exists a \in \tilde{A} : b = f(a)\}$

$f^{-1}(\tilde{B} \subseteq B) = \{a \in A | \exists b \in \tilde{B} : b = f(a)\}$

Beschränkung:

$\tilde{A} \subseteq A. \quad f|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \to B, a \in \tilde{A} \mapsto f(a)$

Induktion und Anwendungen

Induktionsverfahren:

Sei $P(n)$ das $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ zu zeigende Prädikat. Zeige zuerst $P(n_0)$ (Induktionsanfang). Sei dann $n \geq n_0$ gegeben und $P(n)$ vorausgesetzt (Induktionsannahme). Zu zeigen ist dann, dass daraus $P(n+1)$ folgt. (Induktionsschritt). Es folgt $P(n) \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$. (Induktionsschluss)

Theorem 1.7 Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Theorem 1.8 Es gilt $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Aufzählungstheorie

$A \simeq B \Leftrightarrow \exists f \in \mathrm{Fun}(A,B) : f$ bijektiv

$A \simeq B \Leftrightarrow B \simeq A$

$A \simeq B \wedge B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$

Kardinalität:

A ist endlich, wenn $\exists n \in \mathbb{N} : A \simeq [n]$ Dann ist $n = \#A$ die Kardinalität von A. **Theorem 1.9**

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m \neq n \Rightarrow [n] \not\simeq [m]$$

Falls $A \not\simeq B$:

$f : A \to B$ injektiv $\Rightarrow \#A \leq \#B$

$f : A \to B$ surjektiv $\Rightarrow \#A \geq \#B$

Außerdem:

$\#(A \cup B) + \#(A \cap B) = \#A + \#B$

$\#(A \times B) = (\#A) \cdot (\#B)$

$\#\mathrm{Fun}(A,B) = (\#B)^{\#A}$

$\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$

Fakultät und Binomialkoeffizienten:

Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man die Fakultät durch $0! = 1$ und für $n \geq 1$ als die Anzahl von bijektiven Funktionen von $[n]$ nach $[n]$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{m}$ die Anzahl der Teilmengen $a \subseteq [n]$ mit $\#a = m$.

Theorem 1.12

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, \qquad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Eigenschaften:

$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$

Für $n \geq m \geq 1$:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}$$

Theorem 1.13 Es gilt $\forall x, y \in \mathbb{R}$ und $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{m} x^k y^{n-k}$$

Abzählbarkeit:

Für alle unendlichen Mengen A gilt $\mathbb{N} \leq A$. Wenn $A \simeq \mathbb{N}$ gilt, sagt man, dass A abzählbar ist.

Theorem 1.15 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar. $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Analysis mit $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Ordnungsbeziehung:

Sei X eine Menge. $S \subseteq X \times X$ ist eine Ordnungsbeziehung auf X, wenn gilt:

$$(x,y) \in S \wedge (y,z) \in S \Rightarrow (x,z) \in S$$
$$(x,y) \in S \wedge (y,x) \in S \Rightarrow x = y$$

S ist *total*, wenn gilt:

$$\forall x, y \in X : (x,y) \in S \vee (y,z) \in S$$

Schranken:

Sei $(x, \leq)$ eine Menge mit totaler OB und $Y \subseteq X$. $x \in X$ ist eine
obere Schranke für Y, wenn $\forall y \in Y : y \leq x$ gilt.
untere Schranke für Y, wenn $\forall y \in Y : y \geq x$ gilt.

Max, Min:

Y besitzt ein
Maximum, wenn $\exists y_+ \in Y : \forall y \in Y : y \leq y_+$. Dann ist $y_+ = \max Y$.
Minimum, wenn $\exists y_- \in Y : \forall y \in Y : y \geq y_-$. Dann ist $y_- = \min Y$.

Sup, Inf:

$\sup Y = \min\{x \in X | x \text{ ob. Schr. von } Y\}$

$\exists \max Y \Rightarrow \sup Y = \max Y$

$\inf Y = \max\{x \in X | x \text{ unt. Schr. von } Y\}$

$\exists \min Y \Rightarrow \inf Y = \min Y$

Abstandsfunktionen:

$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist eine Abstandsfunktion, wenn gilt:

$d(x,y) = d(y,x)$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Auf $\mathbb{R}$: $d(x,y) = |x-y| = \max\{x-y, y-x\}$

Reelle Zahlen

Eigenschaften:

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein *Körper*.

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z$

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

$\forall x, y \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq x \leq y \Rightarrow x^n \leq y^n$

$\mathbb{R}$ ist *archimedisch*: $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$

$\mathbb{R}$ ist *vollständig*: Alle nach oben beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$ besitzen ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Betrag und Abstand:

$|| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto |x| = \max(x, -x)$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Dreiecksungleichung:

$\forall x, y \in \mathbb{R} : ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$

Verallgemeinert:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} : \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Theorem 2.3 Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ und $\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Komplexe Zahlen

$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Betrag und Konjugation:

Sei $z = a + ib$.

Dann ist der Betrag $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{zz^*}$
und die komplex Konjugierte $z^* = a - ib$

Es gilt $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und $\forall z \in \mathbb{C} : \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

$\mathbb{C}$ besitzt *keine Ordnungsbeziehung*, aber die *euklidische Abstandsfunktion* $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

Komplexe Exponentialfunktion

$\forall a, b \in \mathbb{R} : \exp(a + ib) = e^a(\cos b + i \sin b)$

Theorem 2.5

$$\begin{aligned}
E1 :& \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \\
E2 :& \quad \forall z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} : \exp(z) = e^z, e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
E3 :& \quad \forall z \in \mathbb{C} : \exp(z^*) = (\exp(z))^* \\
& \quad |\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)} \\
E4 :& \quad \exp(i\pi) = -1 \\
E5 :& \quad \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ ist surjektiv} \\
E6 :& \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \exp(z_1) = \exp(z_2) \\
& \quad \Leftrightarrow (z_1 - z_2) \in 2i\pi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Additionstheoreme:

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

Es folgt außerdem:

$\forall b \in \mathbb{R} : e^{ib} = \cos b + i \sin b$

Polardarstellung:

$\forall z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\theta}, \quad \rho = |z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \theta \in \mathbb{R}$

Hauptargument: $\theta \in (-\pi, \pi]$

Bestimmung des Arguments $\theta = \arg(a + \mathrm{ib})$:

$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$

$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$

Komplexe Winkelfunktionen:

Definition $\forall z \in \mathbb{C}$:

$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Weiterhin gilt $\forall z \in \mathbb{C} : \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$

Außerdem $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$\cos(a + ib) = \cos(a)\cosh b - i \sin a \sinh b$

Mit den *hyperbolischen Funktionen*:

$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

Lösung von Gleichungen

Quadratische Gleichungen:

Sei $P(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ ist die *Diskriminante* von P.

Dann sind die *Nullstellen* von P:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Falls alle Koeffizienten reell sind, gilt:

$\Delta > 0$: P hat zwei reelle Nullstellen.

$\Delta = 0$: P hat als zweifache Nullstelle $-\frac{b}{2a}$.

$\Delta < 0$: P hat zwei nicht reelle, zueinander konjugierte Nullstellen.

Falls $P = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$, kann man die *reduzierte Diskriminante* $\delta = \beta^2 - \alpha\gamma$ einführen.

Dann sind die Nullstellen $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\delta}}{\alpha}$.

Polynomiale Gleichungen:

Theorem 2.6 Fundamentalsatz der Algebra: Sei $d \in \mathbb{N}^*$ und $P(x) = a_d x^d + \ldots a_0$ ein Polynom von Grad d mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}, i \in [d]$. Es existieren paarweise unterschiedliche $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{C}$, sodass $m_1 + \ldots + m_r = d$ und

$$P(x) = a_d \prod_{k=1}^{r} (x - \lambda_k)^{m_k}$$

Die geordneten Paare $(\lambda_i, m_i), i \in [r]$ sind bis auf ihre Reihenfolge eindeutig.

Falls P ein Polynom mit reellen Nullstellen ist, gilt:

$\forall \lambda \in \mathbb{C} : P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow P(\lambda^*) = 0$

Damit besitzt ein Polynom von ungeradem Grad mindestens eine relle Nullstelle.

Newton-Identitäten:

Sei $(x_1, \ldots, x_d)$ ein d-Tupel komplexer Zahlen. Wir führen das *elementarsymmetrische Polynom* ein:

$$e_k(x_1, \ldots, x_d) = \begin{cases} \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq d} x_{j_1} \cdots x_{j_k}, & k \in [d \\ 1, & k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Theorem 2.7 Newton-Identitäten: Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ ein Polynom vom Grad d mit komplexen Koeffizienten und $mu_1, \ldots, \mu_d$ seine Liste von Nullstellen mit Multiplizitäten. Dann sind die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{d-1}$ durch die folgenden Formeln bestimmt:

$$\forall k \in [d] : e_k(\mu_1, \ldots, \mu_d) = (-1)^k \frac{a_{d-k}}{a_d}$$

Daraus folgt für $P(x)$ vom Grad d mit $a_d \neq 0$:

$$a_{d-1} = -a_d \sum_{j=1}^{d} \mu_j, \quad a_0 = (-1)^d a_d \prod_{j=1}^{d} \mu_j$$

Konvergenz von Folgen und Reihen

Folgen

Eine *Folge* ist eine Funktion $u : I \to \mathbb{K}$, wobei $I \subseteq \mathbb{N}$ unendlich ist und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Folge wird mit $(u_n)_n$ ausgeschrieben.

Konvergenz:
$(u_n)_n$ *konvergiert* gegen einen *Grenzwert* $a \in \mathbb{K}$, wenn gilt:
$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in I : n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - a| \leq \varepsilon$.
Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} u_n = a$.
$(u_n)_n$ *divergiert* gegen $\pm\infty$, wenn gilt:
$\forall M > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in I : n \geq n_0 \Rightarrow u_n \gtrless \pm M$
Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist *eindeutig*.

Schranken:
$(u_n)_n$ ist *beschränkt*, wenn ein $M > 0$ existiert, sodass gilt: $\forall n \in I : |u_n| \leq M$. M heißt *obere Schranke* von $(u_n)_n$. Es gilt:
$(u_n)_n$in $\mathbb{C}$ konvergent $\Rightarrow$ beschränkt
Konstante Folgen sind konvergent.

Theorem 3.1 Eine komplexe Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert genau wenn $(\mathrm{Re}(u_n))_n$ und $(\mathrm{Im}(u_n))_n$ in $\mathbb{R}$ konvergieren. In diesem Fall gilt:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = (\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(u_n)) + i(\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(u_n))$$

Monotonie:
Eine *reelle* Folge $(u_n)_n$ ist
steigend, wenn $u_{n+1} \geq u_n$ für alle $n \in I$ gilt.
fallend, wenn $u_{n+1} \leq u_n$ für alle $n \in I$ gilt.
monoton, wenn sie fallend oder steigend ist.
Falls $u_n \geq 0$ für alle $n \in I$ gilt, ist $(u_n)_n$ steigend/fallend, wenn $\frac{u_{n+1}}{u_n} \gtrless 1$ gilt.

Theorem 3.2 Monotone Folgen besitzen immer einen Grenzwert.

$$(u_n)_n \text{ steigend} \Rightarrow \exists(\lim_{n\to\infty} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$$
$$(u_n)_n \text{ fallend} \Rightarrow \exists(\lim_{n\to\infty} u_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$$

Vergleiche und Konvergenz

Theorem 3.3 Seien $(u_n)_{n\in I}$ und $(v_n)_{n\in I}$ zwei reelle Folgen, die einen Grenzwert in $\hat{\mathbb{R}}$ besitzen. Dann:

$$(\forall n \in I : u_n \leq v_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$$

Theorem 3.4 Taktik der Gendarmen: Seien $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$ reelle Folgen, sodass $\forall n \in I : u_n \leq v_n \leq w_n$.
Wenn $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = a \in \mathbb{R}$ gilt, muss $\lim_{n\to\infty} v_n = a$ gelten.
Die Fliehenden: Seien $(u_n)_n, (v_n)_n$ reelle Folgen, sodass $u_n \leq v_n$ für alle $n \in I$. Dann:
$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$
$\lim_{n\to\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Wichtige Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
&U1: && 1 + x \leq e^x \\
&U1': && \forall M > 0 : \exists c > 0 : \forall x \in \mathbb{C}: \\
& && |x| \leq M \Rightarrow |e^x - 1| \leq c|x| \\
&U2: && \forall x \in (-1, +\infty) : \ln(1+x) \leq x \\
&U2': && \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \\
&U3: && \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \sin(x) \leq x \\
&U4: && \forall x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \\
&U5: && \forall x \in (-1,1) : 1 + x \leq \frac{1}{1-x}
\end{aligned}$$

Elementare Folgen:
Fakultätswachstum: $\lim_{n\to\infty} n! = +\infty$
Geometrische Folge:
$\forall a \in (0,1) : \lim_{n\to\infty} a^n = 0$
$\forall a > 1 : \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$
Wachsende Potenz: $\forall \alpha > 0 : \lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty$
Fallende Potenz: $\forall \alpha > 0 : \lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} = 0$
Logarithmisches Wachstum: $\lim_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty$

Theorem 3.5 Elementare asymptotische Vergleiche:

$$\begin{aligned}
\forall a \in (0,1): \quad & \forall \alpha > 0 : n^\alpha a^n && \to_{n_\infty} 0 \\
& \forall \alpha > 0 : \frac{\ln(n)}{n^\alpha} && \to_{n_\infty} 0 \\
& \forall a > 0 : \frac{a^n}{n!} && \to_{n_\infty} 0
\end{aligned}$$

Fak.-Wachstum>Exp.-Wachstum>Pot.-Wachstum>Log.-Wachstum
Trick: Bei streng positiven Folgen kann man zeigen, dass für n groß genug gilt: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \rho < 1$. Wenn dann die obere Schranke $c \cdot \rho^n$ gegen 0 konvergiert, muss auch $(u_n)_n$ gegen 0 konvergieren.

Operationen:

$$\lim_{n\to\infty} (v_n + u_n) = \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} v_n\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} (v_n \cdot u_n) = \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} v_n\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} u_n}{\lim_{n\to\infty} v_n} \quad , \lim_{n\to\infty} v_n \neq 0.$$
$$\lim_{n\to\infty} e^{u_n} = e^{\lim_{n\to\infty} u_n} \quad \text{(i.A.)}$$
$$\lim_{n\to\infty} \ln(u_n) = \ln\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right)$$
falls $(u_n)_n$ reell positiv, $\lim_{n\to\infty} u_n > 0$
$$\lim_{n\to\infty} u_n^\alpha = \left(\lim_{n\to\infty} u_n\right)^\alpha, \quad u_n > 0, \lim_{n\to\infty} u_n > 0, \alpha \in \mathbb{C}$$

Ausdehnung in $\hat{\mathbb{R}}$

Bei reellen Folgen mit Grenzwert in $\hat{\mathbb{R}}$ sind die Operationen mit folgenden Regeln gültig:

$$\begin{array}{lll}
\infty + \infty = \infty & -\infty - \infty = -\infty & a \pm \infty = \pm\infty \\
\infty \cdot \infty = \infty & b \cdot \infty = \mathrm{sgn}(b)\infty & \frac{b}{\pm\infty} = 0 \\
e^\infty = \infty & e^{-\infty} = 0 & a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*
\end{array}$$

Für den $\ln$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} u_n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\} \quad \ln(\infty) = \infty \quad \ln(0) = -\infty$$

In den pathologischen Fällen kann man nichts folgern:

$$\infty - \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0 \cdot \infty$$

Theorem 3.6 Cesàro-Satz: Sei $(u_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} u_n = a \in \hat{\mathbb{R}}$ oder $\mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} = a$$

Theorem 3.7 Multiplikativer Cesàro-Satz: Sei $(u_n)_{n\geq 1}$ eine streng positive Folge. Für alle $a > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = a.$$

Interessante Grenzwerte:
Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$
$$k \not\propto n : \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^k = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = e$$

Teilfolgen:
Sei $(u_n)_{n\in I}$ eine Folge. Eine *Teilfolge* $(v_n)_n$ ist eine Folge der Form $v_n = u_{\varphi(n)}$, wobei $\varphi : I \to I$ eine steigende Funktion ist.

Theorem 3.8 Wenn $(u_n)_n$ in $\mathbb{C}$ oder $\hat{\mathbb{R}}$ gegen a konvergiert, konvergiert auch jede Teilfolge gegen a.

Häufungspunkte:
Ein *Häufungspunkt* $a \in \mathbb{C}$ für $(u_n)_n$ ist der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge.

Theorem 3.10 Satz von Bolzano-Weierstraß:

$$(u_n)_{n\in I} \text{ beschränkt } \Rightarrow \exists \text{ konvergente Teilfolge}$$

Limes inferior/superior:
Sei $(u_n)_n$ eine reelle Folge.

$$u_n^+ = (\sup_{k\geq n} u_k) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$u_n^- = (\inf_{k\geq n} u_k) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n = \lim_{n\to\infty} u_n^+ \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n = \lim_{n\to\infty} u_n^-$$

Theorem 3.11 Sei $H[u] \subseteq \hat{\mathbb{R}}$ die Menge von (endlichen oder unendlichen) Häufungspunkten für $(u_n)_n$. Diese Menge ist nicht leer und es gilt:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n = \max H[u] \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n = \min H[u]$$

Theorem 3.12 Sei $(u_n)_n$ eine Folge und $a \in \mathbb{C}$ oder $\hat{\mathbb{R}}$. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad \Leftrightarrow \quad H[u] = \{a\}$$

Für reelle Folgen gilt immer:

$$\forall n \in I : u_n^- \leq u_n \leq u_n^+$$

Cauchy-Folgen:
$(u_n)_n$ ist eine *Cauchy-Folge*, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : |u_m - u_n| \leq \varepsilon.$$

Theorem 3.13 $(u_n)_n$ konvergiert in $\mathbb{C}$ genau wenn $(u_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist.

Reihen

Eine Reihe ist eine Folge $(S_n)_{n\geq n_0}$ der Form:

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \qquad (u_k)_{k\geq n_0} \qquad n_0 \in \mathbb{N}$$
$$\forall n \geq n_0 : S_n - S_{n-1} = u_n$$

Wenn die Reihe in $\hat{\mathbb{R}}$ oder $\mathbb{C}$ gegen einen Grenzwert a *konvergiert*, schreibt man:

$$a = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k$$

Konvergenz:
Positive Reihen konvergieren in $\hat{\mathbb{R}}$.
Es gilt für positive Folgen $u_n \geq 0$:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k < +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Klammern können in konvergenten Reihen hinzugefügt, aber nicht ausgelassen werden.
Wenn $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Funktion ist, haben die Reihen $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ und $S'_n = \sum_{k=1}^{n} u_{\varphi(k)}$ nichts miteinander zu tun.

Absolute Konvergenz:
Eine Reihe $\sum_{k\geq 0} u_k$ ist *absolut konvergent*, wenn gilt:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |u_k| < +\infty.$$

Theorem 3.14 Sei $\sum_{k\geq n_0} u_k$ eine absolut konvergente Reihe. Dann ist $\sum_{k\geq n_0} u_k$ eine konvergente Reihe und:

$$\left|\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |u_k| < +\infty$$

Außerdem: für alle bijektiven Funktionen $\varphi : I \to I$ gilt:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_{\varphi(k)}$$

Restfolgen:

Der Rest einer konvergenten Reihe $\sum_{k\geq 0} u_k$ ist die Folge $(R_n)_n$, wobei gilt: $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$

Es gilt immer: $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Seien n_0, n_1 gegeben:

$$\left(\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k\right) \text{(abs.) konv.} \Leftrightarrow \left(\sum_{k=n_1}^{\infty} u_k\right) \text{(abs.) konv.}$$

Vergleiche:
Seien $n_0 \in \mathbb{N}$ und $(u_n)_n$ und $(v_n)_n$ reelle Folgen, so dass $u_n \leq v_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann folgt:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=n_0}^{\infty} v_k = +\infty$$

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} v_k < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k < +\infty$$

Theorem 3.16 Satz der alternierenden Reihen: Sei $(u_n)_{n\geq n_0}$ eine positive, fallende Folge, so dass $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Dann konvergiert $\sum_{k\geq n_0} (-1)^k u_k$ in $\mathbb{R}$.

Theorem 3.17 Verdichtungssatz: Sei $(u_n)_{n\geq 0}$ eine positive, fallende Folge. Dann gilt:

$$\left(\sum_{k\geq 1} u_k\right) \text{ konvergent } \Leftrightarrow \left(\sum_{k\geq 0} 2^k u_{2^k}\right) \text{ konvergent.}$$

Beispiele:
Die *Geometrische Reihe*

$$a \in \mathbb{C} \sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a \neq 1 \\ n+1, & a = 1 \end{cases}$$

konvergiert gegen $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ für $|a| < 1$, ist beschränkt für $|a| \leq 1$ und divergiert für $|a| \geq 1$.

$$s \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^s} < +\infty \Leftrightarrow s > 1$$

Theorem 3.18 Quotientenkriterium: Sei $(u_n)_n$ eine Folge, $u_n \neq 0$ für n groß genug.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{k\geq n_0} u_k \text{ absolut konvergent.}$$

Oft existiert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$. Dann $\overline{\lim} = \lim$.

Theorem 3.19 Wurzelkriterium: Sei $(u_n)_n$ eine Folge. Definiere:

$$\rho(u) = \overline{\lim_{n\to\infty}} |u_n|^{\frac{1}{n}} \in [0, +\infty]$$

Dann gilt:

$$\rho(u) < 1 \Rightarrow \sum_{k\geq n_0} u_k \text{ absolut konvergent.}$$

$$\rho(u) > 1 \Rightarrow \sum_{k\geq n_0} u_k \text{ divergiert.}$$

Produktreihen:
Seien $\sum_{k\geq 0} a_k$ und $\sum_{k\geq 0} b_k$ gegeben. Dann ist die Produktreihe:

$$\sum_{k\geq 0} \sum_{l=0}^{k} a_k b_{k-l}$$

Theorem 3.20 Wenn $\sum_{k\geq 0} a_k$ und $\sum_{k\geq 0} b_k$ absolut konvergent sind, ist damit die Produktreihe absolut konvergent und:

$$\sum_{k\geq 0} a_k \cdot \sum_{k\geq 0} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l\right)$$

Potenzreihen:
Eine *Potenzreihe* ist eine Reihe der Form:

$$\sum_{k\geq n_0} a_k z^k \qquad z \in \mathbb{C} \qquad (a_n)_{n\geq n_0} \text{ komplexe Folge}$$

Konvergenzradius:
Der *Konvergenzradius* (KR) einer Potenzreihe ist:

$$\text{KR} = \sup\left\{ r \geq 0 \,\middle|\, \sum_{k\geq n_0} |a_k| r^k < +\infty \right\} \in [0, +\infty]$$

Theorem 3.21 Konvergenzkreisscheibe:

1) Für $|z| < \text{KR}$ ist $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ absolut konvergent.

2) Für $|z| > \text{KR}$ ist $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ divergent.

Am Rand der Konvergenzscheibe (bei $|z| = \text{KR}$) kann man i.A. nichts folgern. Wenn für n groß genug gilt:

$$a_n \leq b_n \quad \Rightarrow \quad \text{KR}\left(\sum_{k\geq 0} a_k z^k\right) \leq \text{KR}\left(\sum_{k\geq 0} b_k z^k\right)$$

Theorem 3.22 Hadamard-Formel: Für $\sum_{k\geq n_0} a_k z^k$ gilt:

$$\frac{1}{\text{KR}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \in [0, +\infty]$$

Theorem 2.23 Quotientenkriterium für Potenzreihen: Sei $(a_n)_{n\geq n_0}$ mit $a_n \neq 0$ für n groß genug. Dann gilt:

$$\frac{1}{\text{KR}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0, +\infty]$$

$f(z)$ für $\lvert z\rvert < \text{KR}$	Potenzreihe	KR
$\exp(z)$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$	$+\infty$
$\ln(1+z)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}$	1
$-\ln(1-z)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$	1
$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$	1
$\frac{1}{(1-z)^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k$	1
$\frac{1}{\sqrt{1-z}}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} z^k$	1
$(1+z)^{\alpha}$ $(\alpha \notin \mathbb{N})$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} z^k$	1
$\frac{1}{(1-z)^{\alpha}}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{k!} z^k$	1
	$\sum_{k\geq 0} k!\, z^k$	0

Stetigkeit

Topologie
Offene und abgeschlossene Teilmengen: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$.

$$A \text{ offen} \Leftrightarrow \forall a \in A : \exists \eta > 0 : (a-\eta, a+\eta) \subseteq A$$

$$A \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus A \text{ offen.}$$

Theorem 4.1 $A \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen genau dann wenn: Für alle Folgen $u : \mathbb{N} \to A$, die in $\mathbb{R}$ konvergieren, ist $\lim_{n\to\infty} u_n \in A$.

Kreisscheiben in $\mathbb{C}$:
Kreisscheibe vom Radius $\eta > 0$ zentriert in $a \in \mathbb{C}$:

$$D(a,\eta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \eta\}$$

$$\overline{D}(a,\eta) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq \eta\}$$

Sei $A \subseteq \mathbb{C}$.

$$A \text{ offen } \Leftrightarrow \forall a \in A : \exists \eta > 0 : D(a,\eta) \subseteq A$$

$$A \text{ abgeschlossen } \Leftrightarrow \mathbb{C} \setminus A \text{ offen.}$$

Theorem 4.2 A ist in B abgeschlossen genau dann wenn für alle konvergenten Folgen in A, deren Grenzwert zu B gehört, der Grenzwert auch zu A gehört.

Äquivalente Definitionen von Stetigkeit

Theorem 4.3 Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, A \subseteq \mathbb{C}, f : A \to \mathbb{K}$.

S1: f stetig an $x \Leftrightarrow \forall a : \mathbb{N} \to A :$ $a(n) \to_{n_\infty} x \Rightarrow (f \circ a)(n) \to_{n_\infty} f(x)$.

S2: f stetig an $x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall y \in A :$ $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

S3: f stetig $\Leftrightarrow \forall U$ offen in $\mathbb{K}$: $f^{-1}(U)$ offen in A.

S4: f stetig $\Leftrightarrow \forall U$ abgeschlossen in $\mathbb{K}$: $f^{-1}(U)$ abgeschlossen in A.

f heißt überall/schlechthin stetig, wenn: $\forall x \in A :$ f stetig an x.

Theorem 4.5 Sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sodass $f(A) \subseteq A$. Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ mit $a(n+1) = f(a(n)) \forall n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = L \in A \Rightarrow L \text{ Fixpunkt von } f : f(L) = L$$

Operationen

Seien $f, g : A \to \mathbb{K}$ stetig. Dann sind $f \cdot g, f + g$ stetig. Wenn $g(x) \neq 0 \forall x \in A$, dann ist $\frac{f}{g}$ stetig. Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann sind $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ stetig. Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f), |f|$ stetig.

Beispiele:
Konstante Funktionen sind stetig, $\mathrm{id}_{\mathbb{K}}$ ist stetig, Polynome und rationale Funktionen $\frac{R}{Q}$ sind stetig in $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{C} \mid Q(x) = 0\}$.

Verknüpfung:
Seien $f : A \to \mathbb{K}$ und $g : B \to \mathbb{K}'$ stetig, wobei $f(A) \subseteq B$. Dann ist $g \circ f$ wohldefiniert und stetig.

Lipschitzstetigkeit:
$f : A \to \mathbb{C}$ heißt lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L, wenn gilt:

$$\forall x, y \in A : |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$$

$$f \text{ lipschitz} \Rightarrow f \text{ stetig.}$$

Theorem 4.6 Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ die Koeffizientenfolge einer Potenzreihenfkt. $S : z \mapsto \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n$. Dann ist $S : D(0, \text{KR}) \to \mathbb{C}$ stetig.

Theorem 4.7

1) $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh$ sind in $\mathbb{C}$ stetig.

2) $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ist in $\mathbb{C} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ stetig.

3) $\cot\mathrm{an} = \frac{\cos}{\sin}$ ist in $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ stetig.

4) $\tanh, \mathrm{cotanh}$ in Definitionsber. stetig.

5) $\ln$ in $\mathbb{R}_{>0}$ stetig.

6) $x \mapsto x^{\alpha}$ stetig in $\mathbb{R}$, wenn $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$; stetig in $\mathbb{R}_{>0}$, wenn $\alpha \in \mathbb{R}_{<0}$.

Kompaktheit:
A heißt *kompakt* (kpt), wenn gilt:

$$\forall a : \mathbb{N} \to A : \exists j : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} \left[(a \circ j)(n)\right] \in A.$$

(jede Folge in A hat eine in A konvergente Teilfolge)

Kompaktheit hängt nicht von der *Obermenge* ab.

Theorem 4.8 $A \subseteq \mathbb{C}$: A kpt $\Leftrightarrow$ A abgeschlossen und beschränkt

Theorem 4.9 $A \subseteq \mathbb{R}$ kpt $\Leftrightarrow A$ hat max und min.

Theorem 4.10 $A \subseteq \mathbb{C}$ kpt, $f : A \to \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow$ $f(A)$ auch kpt.

Theorem 4.11

$$A \subseteq \mathbb{C} \text{ kpt}, f : A \to \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ hat auf } A \text{ min,max:}$$

$$\exists x_{\pm} \in A : \forall x \in A : f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$$

Gleichmäßige Stetigkeit:
$A \subseteq \mathbb{C}, f : A \to \mathbb{C}$: f heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in A :$$

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$$f \text{ glm. stetig } \Rightarrow f \text{ stetig.}$$

Theorem 4.12 Satz von Heine:

$$A \subseteq \mathbb{C} \text{ kpt}, f : A \to \mathbb{C} \text{ stetig } \Rightarrow f \text{ glm. stetig}$$

Eigenschaften reeller stetiger Funktionen

Theorem 4.13 Falls $f : [A,B] \to \mathbb{R}$ stetig, mit $f(A) < f(B)$, dann gilt:

$$\forall y \in (f(A), f(B)) : \exists x \in (A,B) : f(x) = y$$

Oder äquivalent: Stetige Funktionen $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden Intervalle auf Intervalle ab.

Stetigkeit von Umkehrungen:

Theorem 4.15 Sei $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, s.m.s/s.m.f.. Dann gilt:

1) $f : I \to f(I)$ bijektiv
2) $f^{-1} : f(I) \to I$ stetig und s.m.s/s.m.f

Theorem 4.16 Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : K \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig. Dann gilt:

1) $f : K \to f(K)$ bijektiv
2) $f^{-1} : f(K) \to K$ stetig

Wichtige Umkehrfunktionen:

$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$
$\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$
$\arctan : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$
$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$
$\operatorname{arcosh} : [1,+\infty) \to [0,+\infty), y \mapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$
$\operatorname{artanh} : (-1,1) \to \mathbb{R}, y \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

Grenzwerte und asymptotisches Verhalten von Funktionen

Abschluss:

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{K}$. Der *Abschluss* von A in $\hat{\mathbb{R}}$ ist dann die Menge $\overline{A}$, die alle Grenzwerte einer in $\mathbb{R}$ konvergenten Folge in A enthält.

$x, y \in \mathbb{R}, x < y$

$A = (x,y) \Rightarrow \overline{A} = [x,y] \quad A = (x,+\infty) \Rightarrow \overline{A} = [x,+\infty]$

Punkte in $\overline{A}$ sind entweder Punkte in A oder am Rand von A.

Grenzwert einer Funktion:

Sei $a \in \overline{A} \subseteq \hat{\mathbb{R}}$ und $l \in \hat{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \eta > 0 : \forall x \in A : |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Theorem 4.17 $a, l \in \hat{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (u_n)_n \in A \text{ mit } \lim_{n \to \infty} u_n = a : \lim_{n \to \infty} f(u_n) = l$$

Theorem 4.18 Eine Funktion $f : A \to \mathbb{K}$ ist in $a \in A$ genau dann stetig, wenn $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ausdehnung durch Stetigkeit:

Sei $f : A \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion und $a \in \overline{A} \setminus A$. Dann kann durch folgende Formel eine *Ausdehnung* von f auf $\overline{A}$ vorgenommen werden:

$$\tilde{f} : A \cup \{a\} \to \mathbb{K}, x \mapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & x = a \end{cases}$$

$\tilde{f}$ ist dann stetig.

Theorem 4.19 Charakterisierung von Stetigkeit durch beidseitige Grenzwerte: Seien I ein nichtleeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$, $a \in I$ und $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{K}'$ eine stetige Funktion. Eine stetige Funktion $\tilde{f} : I \to \mathbb{K}'$, sodass $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \neq a$, existiert genau dann wenn sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert wenn $x \to a$ in $\mathbb{K}'$ existieren und gilt:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Umgebungen:

Seien $A \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \overline{A}$.

Eine *Umgebung* von $a \in \mathbb{R}$ in A ist eine offene Menge der Form $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap A$, wobei $\varepsilon > 0$.

Eine Umgebung von $+\infty$ ist eine offene Menge der Form $(M, +\infty) \cap A$, wobei $M \in \mathbb{R}$.

Eine Umgebung von $-\infty$ ist eine offene Menge der Form $(-\infty, M) \cap A$, wobei $M \in \mathbb{R}$.

Seien $B \subseteq \mathbb{C}$ und $b \in \overline{B}$. Eine Umgebung von $b \in \mathbb{C}$ in B ist $D(b,\varepsilon) \cap B$, wobei $\varepsilon > 0$.

$f(x)$ hat eine gewisse Eigenschaft E *in der Nähe von* a:

$$\exists \text{ Umgebung } \Omega \subseteq A \text{ von } a : f(x) \text{hat } E \forall x \in \Omega \setminus \{a\}$$

Landau-Symbole:

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{A}$.

$$f(x) \overset{x \to a}{=\!=} O(g(x)) \Leftrightarrow \exists C > 0 : \exists \Omega_C \text{ von } a \text{ in } A : \forall x \in \Omega_C : |f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$$

"f ist durch g in der Nähe von a *dominiert*."

$$f(x) \overset{x \to a}{=\!=} o(g(x)) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \Omega_\varepsilon \text{ von } a \text{ in } A : \forall x \in \Omega_\varepsilon : |f(x)| \leq \varepsilon \cdot |g(x)|$$

"f ist in der Nähe von a gegenüber g *vernachlässigbar*."

$$f(x) \overset{x \to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \overset{x \to a}{=\!=} o(g(x))$$

"f ist *asymptotisch äquivalent* zu g."

Falls g in der Nähe von a (nicht in a) nicht identisch null ist:

$$f(x) \overset{x \to a}{=\!=} O(g(x)) \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \text{ beschränkt um } a.$$

$$f(x) \overset{x \to a}{=\!=} o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) \overset{x \to a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Operationen:

Dominanz und Vernachlässigbarkeit sind verträglich mit Multiplikation und Addition. Asymptotische Äquivalenz ist verträglich mit Multiplikation, Addition und Division. Außerdem: $c \in \mathbb{C}^*, f(x) \overset{x \to a}{\sim} c \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = c$.

Ketten:

Asymptotische Äquivalenz, Dominanz und Vernachlässigbarkeit sind *transitiv*. Außerdem:

$$f(x) \overset{x \to a}{=\!=} O(g(x)) \text{ und } g(x) \overset{x \to a}{=\!=} o(h(x)) \Rightarrow f(x) \overset{x \to a}{=\!=} o(h(x))$$

Es gilt: $O(x^n) + O(x^m) \overset{x \to 0}{=\!=} O(x^n)$, falls $m \geq n$. Für $g(x) \overset{x \to a}{\sim} f(x)$ und $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ gilt: $\ln \circ g(x) \overset{x \to a}{\sim} \ln \circ f(x)$

Annäherungen von Potenzreihen:

Sei $S(z) = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k z^k, z < \text{KR}$ eine Potenzreihenfunktion. Dann gilt für ein $m \geq n_0$:

$$S(z) \overset{x \to 0}{=\!=} \left(\sum_{k=n_0}^{m-1} a_k z^k\right) + O(z^m)$$

$$S(z) \overset{x \to 0}{=\!=} \left(\sum_{k=n_0}^{m} a_k z^k\right) + o(z^m)$$

$$S(z) \overset{x \to 0}{\sim} a_{n_1} z^{n_1} \text{ mit } n_1 = \min\{n \geq n_0 | a_n \neq 0\}$$

Annäherungen von rationalen Funktionen

Sei $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + \ldots}{b_m z^m + \ldots}$ mit $p = \min\{n > 0 | a_n \neq 0\}$ und $q = \min\{n > 0 | b_n \neq 0\}$. Dann gilt:

$$R(z) \overset{x \to 0}{\sim} \frac{a_p}{b_q} z^{p-q}$$

$$R(z) \overset{x \to 0}{\sim} \frac{a_n}{b_m} z^{n-m}$$

Es lohnt sich, bei Annäherung von Verhältnissen zu (1) faktorisieren, und (2) den Nenner per geometrischer Reihe zu entwicken.

Differenzierbarkeit und Ableitungen

Hier: Betrachte nur Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Differenzierbarkeit:

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to R$, $a \in A$. >f ist in a *differenzierbar*, wenn gilt:

$$\exists f'(a) \in \mathbb{R} : f(x) \overset{x \to a}{=\!=} f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + o(x-a)$$

$f'(a)$ heißt *Ableitung* von f in a. Der rechte Ausdruck heißt *Linearisierung* von f in der Nähe von a. Äquivalent formuliert:

$$f'(a) = \lim_{x \to a, x \neq a} \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}}_{\text{Steigungsrate}}$$

Es gilt: f diff. $\Rightarrow f$ stetig.

Operationen:

Seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in A$. Dann sind $(f+g), (f \cdot g), \frac{f}{g}$ (für $g(a) \neq 0$) in a diff. und es gilt:

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(f \cdot g)' = fg' + f'g$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}, \qquad g(a) \neq 0$$

Theorem 5.1 Seien $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ und $f(A) \subseteq B$. Wenn f in $a \in A$ diff. und g in $f(a) \in B$ diff., dann gilt:

$$g \circ f \text{ in } a \text{ diff. und } (g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a))$$

$f^n, n \in \mathbb{N}^*$ ist in a diff. und es gilt:

$(f^n)' = nf' \cdot f^{n-1}$

Für $g(a) \neq 0$ ist $1/g^n$ in a diff und es gilt:

$(g^{-n})' = -\frac{ng'}{g^{n+1}}$

Theorem 5.2 Satz der differenzierbaren Umkehrfunktion: Die Umkehrung einer diff.baren Funktion ist nicht immer diff.bar. Sei A ein offenes Intervall. Sei f bijektiv von A nach $f(A)$.

$$f \text{ in } A \text{ diff.} \Rightarrow f^{-1} \text{ in } f(A) \text{ diff.}$$

Wenn f' stetig ist und keine Nullstelle in A hat, gilt:

$$(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$

Polynome und rationale Funktionen sind diff. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $(x^\alpha)' = \alpha x^\alpha$. Für die Exponentialfunktion gilt : $(e^x)' = e^x$ und für den Logarithmus: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Logarithmische Ableitung:

Trick: Es gilt:

$$(\ln \circ f)' = \frac{f'}{f} \qquad (\ln \circ f)'' = \frac{f''}{f} - \left(\frac{f'}{f}\right)^2$$

Theorem 5.3 Differenzierbarkeit von Potenzreihen: Sei $\sum_{n \geq n_0} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten und $\text{KR} > 0$. Dann gilt:

$$S(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n \qquad x \in (-r, r) \text{ diff. mit}$$

$$S'(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{m=n_0-1}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$$

Man darf also unter dem Reihensymbol ableiten. (KR unverändert)

Ableitung von Winkelfunktionen:

Es gilt:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Außerdem:

$$\sin'(x) = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$$
$$\tan' x = 1 + \tan^2 x \qquad \cot' x = -1 - \cot^2 x$$
$$\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$\arctan' y = \frac{1}{1+y^2} \qquad \text{arccot}' y = -\frac{1}{1+y^2}$$
$$\sinh' x = \cosh x \qquad \cosh' x = \sinh x$$
$$\text{arcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \qquad \text{arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$
$$\tanh' x = 1 - \tanh^2 x \qquad \text{artanh}' y = \frac{1}{1-y^2}$$

Ableitung und Variationen

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, und $a \in A$. a ist ein lokales Maximum/Minimum von f, wenn gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in A \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon) :$$
$$f(x) \le f(a) \text{ bzw. } f(x) \ge f(a)$$

a ist ein globales Maximum/Minimum von f, wenn gilt:

$$\forall x \in A : f(x) \le f(a) \text{ bzw. } f(x) \ge f(a)$$

Theorem 5.4 Sei $a \in A$ sd. $\exists \varepsilon > 0 : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq A$. Sei f in A diff.

$$a \text{ ist lokales Extremum } \Rightarrow f'(a) = 0$$

Eine Nullstelle von f' heißt kritischer Punkt von f.

Finden von Extrema:
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$ und diff. in (a,b). Dann liegen eventuelle lokale Extrema entweder in kritischen Punkten $x_k \in (a,b)$ oder in a oder b.

Theorem 5.5 Seien $a, b \in \mathbb{R}, ab$. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$, diff. in (a,b). Dann gilt:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = 0 \qquad \text{Satz von Rolle}$$
$$\exists c \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad \text{Mittelwertsatz}$$

Theorem 5.6 Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diff.

$$f' \ge 0 \Leftrightarrow f \text{ steigend}$$
$$f' \le 0 \Leftrightarrow f \text{ fallend}$$
$$f' > 0 \Rightarrow f \text{ streng steigend}$$
$$f' < 0 \Rightarrow f \text{ streng fallend}$$

Theorem 5.7 Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diff. Dann gilt:

$$\forall x, y \in (a,b) : |f(x) - f(y)| \le \left[\sup_{c \in (a,b)} |f'(c)|\right] \cdot |x - y|$$

f ist also κ-lipschitz mit $\kappa = \left[\sup_{c\in(a,b)} |f'(c)|\right]$.

Es folgen Ungleichungen:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad |\sin x| \le |x| \qquad 1 - \cos(x) \le |x|$$
$$\forall M > 0 : \forall x \in [-M, M] : |e^x - 1| \le e^M |x|$$

Theorem 5.9 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $c \in [a,b]$. Wenn f in $[a,b]$ stetig und in $[a,b] \setminus \{c\}$ diff. ist sowie $\lim_{x\to c, x\neq c} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, dann ist f in c diff. und $f'(c) = l$.

Auflösung von pathologischen Grenzwerten:
Die pathologischen Fälle $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ und $\infty - \infty$ reduzieren sich auf $\frac{0}{0}$, wenn man $f \cdot g = \frac{f}{1/g}$, $\frac{f}{g} = \frac{1/g}{1/f}$ oder $f - g = \frac{1/f - 1/g}{1/f \cdot 1/g}$ schreibt.

Wenn man $f(x) \overset{x\to a}{\sim} cx^\gamma, g(x) = \tilde{c}x^{\tilde{\gamma}}$ annähern kann, dann gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to a}{\sim} \frac{c}{\tilde{c}} x^{\gamma - \tilde{\gamma}}$$

Theorem 5.10 l'Hopital-Regel (von Bernoulli gezeigt!): Seien $f, g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ mit $a \in I$ diff. und $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \hat{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Das gilt auch für $a = \pm\infty$. Wenn $g^{(k)} = f^{(k)} = 0 \forall k < k_0$, kann die Regel k_0-mal angewandt werden.
Falls man bei einem pathologischen Fall die Definition der Ableitung erkennt, kann man diese benutzen.

Höhere Ableitungen

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ ist } C^k, k \in \mathbb{N}^* \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ } k\text{-mal diff.}, f^{(k)} \text{ stetig.}$$

f ist C^0 wenn f stetig ist. f ist C^∞ bzw. *glatt*, wenn gilt: $\forall m : \exists f^{(m)}$.
$f \ C^\infty \Rightarrow f \ C^k \Rightarrow f \ C^{k-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow f \ C^1 \Rightarrow f \ C^0$.

Operationen:

$$f, g \ C^k \Rightarrow (f \cdot g) \ C^k, \qquad (f+g) \ C^k, \qquad \left(\frac{f}{g}\right) C^k$$
$$(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$$
$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} f^{(l)} g^{(k-l)}$$

Die Verknüpfung zweier C^k-Funktionen ist C^k. Konstanten, Polynome, rationale Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich glatt.

Theorem 5.12 Satz der C^k-Umkehrfunktion: Sei A ein offenes Intervall und $f \ C^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, sodass f' keine Nullstelle hat. Dann ist $f^{-1} \ C^k$. Folgerung: $\ln, \arctan, \arcsin, \arccos, \text{arccot}$ sind in ihrem Definitionsbereich glatt.

Theorem 5.13 Sei $\sum_{k\ge0} a_k x^k$ eine reelle Potenzreihe mit $\text{KR} = r > 0$. Dann definiert $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $x \in (-r, r)$ eine glatte Funktion. Es gilt:

$$S^{(m)}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{m+l} \frac{(m+l)!}{l!} x^l$$

(KR unverändert) Folgerung: $\exp, \sin, \cos, \tan$ sind in ihrem Definitionsbereich glatt.

Berechnung der geometrischen Reihe:
Trick:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left[\sum_{l=0}^{\infty} a_l k^l\right]}_{P(k)} x^k = P\left(x \frac{d}{dx}\right) \frac{1}{1-x}$$

Taylor-Formeln:
Sei P ein Polynom n-ten Grades und $x_0 \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$P(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{P^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m$$

Theorem 5.14 Taylor-Formel mit Cauchy-Restterm: Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei außerdem $f : (a,b) \to \mathbb{R} \ C^n$ und auf (a,b) $(n+1)$-mal diff. Für alle x, x_0 in (a,b) existiert $c \in (x, x_0)$, sodass gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Theorem 5.15 Taylor-Ungleichungen: Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal diff. Dann gilt $\forall x, x_0 \in (a,b)$:

$$\left| f(x) - \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m \right|$$
$$\le |x - x_0|^{n+1} \sup_{\xi \in (a,b)} \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$$

Theorem 5.16 Sei $f : I \to \mathbb{R}$ 2-mal diff. und $c \in I$.

$$f'(c) = 0 \text{ und } f''(c) > 0 \Rightarrow c \text{ ist lokales Minimum.}$$
$$f'(c) = 0 \text{ und } f''(c) < 0 \Rightarrow c \text{ ist lokales Maximum.}$$

Partialbruchzerlegung:

Theorem 5.17 Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion. P ist ein Polynom vom Grad d_P, Q ist ein Polynom vom Grad d_Q, beide haben keine gemeinsamen Nullstellen. Sei $\mathcal{P}$ die Menge an Polen von Q und die m_p deren Multiplizitäten.

$$Q(x) = a \prod_{\mathcal{P}} (x - p)^{m_p}$$

Man definiert $m_\infty = d_P - d_Q$. Dann existieren eindeutige $c_{p,k}, c_{\infty,k} \in \mathbb{C}$, sodass gilt:

$$R(x) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{m_p} \frac{c_{p,k}}{(x-p)^k} + \sum_{k=0}^{m_\infty} c_{\infty,k} x^k$$

Theorem 5.18 Summe von Residuen:

$$m_\infty \le -2 \Rightarrow \sum_{p\in\mathcal{P}} c_{p,1} = 0$$
$$m_\infty = -1 \Rightarrow \sum_{p\in\mathcal{P}} c_{p,1} = \lim_{x\to\infty} x R(x)$$

Limes-Verfahren:

$$c_{p,m_p} = \lim_{x\to p} (x-p)^{m_p} \cdot R(x)$$
$$c_{p,m_p} = \frac{P(p)}{\prod_{q\in\mathcal{P}\setminus\{p\}} (p-q)^{m_q}} = \frac{P(p)}{\frac{Q^{(m_p)}(p)}{m_p!}}$$
$$c_{\infty,m_\infty} = \lim_{x\to\infty} x^{-m_\infty} R(x)$$
$$\forall a \neq b : \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$

Parametrische Ableitung:

$$R_t(z) = (z-t)\tilde{Q}(z) = (z-t)\frac{Q(z)}{(z-p)^{m_p}}$$
$$R_t(z) = \frac{a(t)}{z-t} + \tilde{R}_t(z)$$
$$\forall k \in [m_p] : c_{p,k} = \frac{a^{(m_p-k)}(p)}{(m_p-k)!}$$

Oder: setze $z = p + w$ ein und finde Annäherung für $w \to 0$.

Konvexität

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, welches mehr als einen Punkt enthält. Sei $f : I \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ konvex } \Leftrightarrow \forall x, y \in I : \forall t \in [0,1] :$$
$$f((1-t)x + ty) \le (1-t)f(x) + tf(y)$$
$$f \text{ konkav } \Leftrightarrow \forall x, y \in I : \forall t \in [0,1] :$$
$$f((1-t)x + ty) \ge (1-t)f(x) + tf(y)$$

f ist konvex (konkav), wenn $\text{Gr}(f)$ unterhalb (oberhalb) jeder Verbindungsstrecke zw. zwei seiner Punkte liegt.

Theorem 6.1 Sei f sowohl konkav als auch konvex. Dann gilt:

$$f(x) = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Konvexe Kombination:
Seien $x_1, \dots, x_n \in I$. Eine konvexe Kombination von $(x_1, \dots, x_n)$ ist ein Punkt der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i, \text{ mit } \qquad t_i \in [0,1] \qquad \sum_{i=1}^{n} t_i = 1$$

Theorem 6.2 Sei $f: I \to \mathbb{R}$. f ist konvex gdw:

$$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}: \forall x_1, ..., x_n \in I: \forall x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i:$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

Theorem 6.3 Sei $f: I \to \mathbb{R}$. f ist konvex gdw:

$$S_{f,x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ steigend in } I \setminus \{x_0\} \forall x_0 \in I.$$

Theorem 6.4 Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann ist f in $\mathring{I}$ stetig und links und rechts diff. $\forall x \in \mathring{I}$.

Theorem 6.5 Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diff. Folgende Aussagen sind äquivalent:

K1: f konvex

K2: f' steigend

K3: $\forall x, y \in I: f(y) \geq f(x) + (y - x) f'(x)$

Theorem 6.6 Sei $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal diff. Es gilt:

$$f \text{ konvex } \Leftrightarrow f'' \geq 0.$$

I	konvex	konkav	I
$\mathbb{R}$	exp	ln	$\mathbb{R}_{>0}$
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	x^α wobei $\alpha \geq 1$	x^α wobei $\alpha \in [0,1]$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$
$\mathbb{R}_{>0}$	x^α wobei $\alpha < 0$		
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	sinh	sin	$[0, \pi]$
$\mathbb{R}$	cosh	cos	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$[0, \frac{\pi}{2})$	tan	tanh	$\mathbb{R}_{\geq 0}$

Thorem 6.7 Sei $(u_n)_{n \geq 0}$ eine positive Folge, die nicht identisch null ist, und deren Potenzreihe einen KR≥ 0 besitzt. Dann gilt:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \text{ konvex} \qquad \text{für } x \in (-KR, KR)$$

Theorem 6.8 Eine streng konvexe (streng konkave) Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ besitzt höchstens ein Minimum (bzw. Maximum). Wenn f nur konvex ist, muss f zw. zwei Minima konstant und minimal sein.

Theorem 6.9 Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_0$. Es gilt:

$$\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \geq (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}}$$

Theorem 6.10 Seien $p, q \in \mathbb{R}_0$, sodass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, n \in \mathbb{N}^*$ und $x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}$. Es gilt:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Theorem 6.11 Sei $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ definiert

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm, d.h. $d_p(x,y) = \|x - y\|_p$ ist eine Abstandsfunktion.

Integration

Theorem 7.4 Elementare Eigenschaften des Integrals:
Linearität: $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\int_{\mathbb{R}} (af(x) + bg(x)) dx = a \int_{\mathbb{R}} f(x) dx + b \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$$

Monotonie:

$$f \leq g: \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$$

Falls $f = g$ außerhalb einer Nullmenge:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$$

Falls $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ und f positiv, muss $f = 0$ außerhalb einer Nullmenge sein.
Endliche Teilmengen des Integrationsbereiches können ausgelassen werden. Falls $a > b$:

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

Theorem 7.5 Satz der monotonen Konvergenz: Sei $f_n: \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ eine Folge von Funktionen. Falls $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall n, \forall x$, dann existiert ein $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = h(x) \in [0, +\infty]$ und es gilt:

1) $$\lim_{n \to \infty}\left[\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx\right] = \int_{\mathbb{R}} h(x) dx$$

2) $$\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$$

Theorem 7.6 Satz der dominierten Konvergenz: Sei $f: A \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen.

1) $\forall x \in A: \exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) \in \mathbb{C}$.

2) $\exists g: A \to [0, +\infty] \not\subset n: \forall n: \forall x \in A:$
$|f_n(x)| \leq g(x)$
g integrierbar $\Rightarrow f_n$ integrierbar $\forall n$

Es folgt:

$$\lim_{n \to \infty}\left[\int_A f_n(x) dx\right] = \int_A \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) dx$$

Theorem 7.7 Satz der Riemannschen Integrale: Sei f auf $[a,b]$ stetig. Dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right)\right] = \int_a^b f(x) dx$$

Trick: Sei f stetig.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to_{n_\infty} \int_0^1 f(x) dx$$

Stammfunktionen:
Sei $f: A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine *Stammfunktion* von f ist eine differenzierbare Funktion F, sodass $F' = f$. Wenn F_1, F_2 zwei Stammfunktionen sind, dann ist auf allen Intervallen $I \subseteq A$ $F_1 - F_2$ eine Konstante (kann von I abhängig sein).

Theorem 7.8 Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$F' = f \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \Big[F\Big]_a^b$$

$$\forall \alpha \in [a,b]: x \mapsto \underbrace{c}_{\in \mathbb{R}} + \int_\alpha^x f(y) dy \text{ ist Stammfkt.}$$

Theorem 7.9 Variablentransformation: Seien I, K Intervalle. Sei $\Psi: I \to K$ bijektiv und $\mathcal{C}^1$. Sei $f: K \to \mathbb{R}$ stetig und integrierbar. Dann gilt:

$$\int_K f(y) dy = \int_{I = \psi^{-1}(K)} f(\psi(x)) \psi'(x) dx$$

Theorem 7.10 Partielle Integration: Seien f, g $\mathcal{C}^1$ und $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

Gilt auch wenn I nicht kpt, vorausgesetzt $f'g$ und $g'f$ sind integrierbar. Mehrfach: $f, g \mathcal{C}^k, k \geq 1$:

$$\int_a^b f^{(k)}(x) g(x) = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} \Big[f^{(k-l)}(x) g^{(l-1)}(x)\Big]_a^b$$

$$+ (-1)^k \int_a^b f(x) g^{(k)}(x) dx$$

Theorem 7.11 Taylor-Formel mit integralem Rest: Sei f $\mathcal{C}^{k+1}$ auf $[a,b]$.

$$f(b) = \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(a)}{l!} (b-a)^l$$

$$+ \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} (b-a)^{k+1} f^{(k+1)}((1-t)a + tb) dt$$

Elementare Stammfunktionen:

$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	arsinhx	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	arcoshx

Potenzreihen können innerhalb des KR unter dem Reihenzeichen integriert werden.

$$\int^x \left(\frac{c_{p,1}}{x-p} + \frac{c_{p^*,1}}{x-p^*}\right) dx$$

$$= a \ln((x-r)^2 + s^2) - 2b \arctan\left(\frac{x-r}{s}\right)$$

$$\frac{f'}{f^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{f^{\alpha-1}}\right)' \qquad \alpha \geq 2$$

Subsitutionen:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$t = \tanh x^2 \qquad dx = \frac{2dt}{1-t^2}$$

$$\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \qquad \sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Theorem 7.15 Integrierbarkeit von elementaren Funktionen:
Seien $\lambda \in \mathbb{R}^*$ und $s \in \mathbb{R}$. $x \mapsto x^s e^{\lambda x}$ ist in der Nähe von $+\infty$ integrierbar genau dann wenn $\lambda < 0$.
Sei $s \in \mathbb{R}$. $x \mapsto x^s$ ist in der Nähe von 0 integrierbar genau wenn $s > -1$ und in der Nähe von $+\infty$ genau wenn $s < -1$.
Seien $s, t \in \mathbb{R}$. Die Funktion $x \mapsto x^s |\ln x|^t$ ist in der Nähe von 0 integrierbar genau wenn $s > -1$ oder $s = -1 \wedge t < -1$.

Theorem 7.16 Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $f: [n_0, +\infty] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige fallende Funktion. Die Reihe $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ konvergiert genau wenn f in der Nähe von $+\infty$ integrierbar ist.

Theorem 7.17 Seien I und A zwei nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ und sei $f: I \times A \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass:
$x \mapsto f(t,x)$ $\forall t \in I$ integrierbar auf A ist.
$t \mapsto f(t,x)$ $\forall x \in A$ auf I differenzierbar ist.
Eine integrierbare Funktion $g: A \to \mathbb{R}$ existiert, sodass:

$$\forall (t,x) \in I \times A: \left|\frac{d}{dt} f(t,x)\right| \leq g(x).$$

Dann ist $h(t) = \int_A f(t,x) dx$ auf I differenzierbar und es gilt:

$$h'(t) = \int_A \frac{d}{dt} f(t,x) dx$$

Linearisierungsformeln:
$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$